Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Takmičenje iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

1. Na stranici AD pravougaonika $ABCD$ $(AB < BC)$ izabrana je tačka E tako da je $BE = BC$. Normala iz tjemena C na dijagonalu BD siječe produžetak stranice AB u tački F. Dokazati da je trougao BEF pravougli.

2. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da važi $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 3$. Dokazati da tada važe sljedeće nejednakosti:
a) $a^2b^2c^2 \leq 1$.
b) $\frac{1}{1+a^4(b^2+c^2)} + \frac{1}{1+b^4(c^2+a^2)} + \frac{1}{1+c^4(a^2+b^2)} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2}$.

3. Neka je x realan broj takav da je $x + \dfrac{1}{x}$ cio broj. Dokazati da je tada $x^{2014} + \dfrac{1}{x^{2014}}$ takodje cio broj.

4. U koordinatnoj ravni date su nekolinerane tačke $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, pri čemu su $x_i, y_i, i = 1, 2, 3$ neparni prirodni brojevi. Ispitati da li postoji trougao određen tačkama A, B, C, takav da su njegove stranice prirodni brojevi, a povšina trougla iznosi $\sqrt{34}$.

Vrijeme rada: 180 minuta.
Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.
Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.