

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Takmičenje iz MATEMATIKE
za II razred srednje škole

1. U jednakokrakom trouglu ABC ($AB = BC$) je odabrana tačka M takva da je $\angle AMC = 2\angle ABC$. Tačka N na duži AM zadovoljava uslov $\angle BNM = \angle ABC$. Dokazati da je $BN = CM + MN$.
2. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$ pozitivni brojevi, takvi da je $a_i \geq \sqrt{2}$ za $i \in \{1, 2, \dots, 2014\}$. Dokazati da tada važi nejednakost

$$\frac{(a_1^4 - a_1^2 + a_1 - 2)(a_2^4 - a_2^2 + a_2 - 2) \cdots (a_{2014}^4 - a_{2014}^2 + a_{2014} - 2)}{(a_1^2 + \frac{a_1}{2} - 2)(a_2^2 + \frac{a_2}{2} - 2) \cdots (a_{2014}^2 + \frac{a_{2014}}{2} - 2)} \geq 2^{2014}.$$

3. Izračunati zbir

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2(2014 \cdot 90^\circ).$$

Uglovi su dati u stepenima (ne u radijanima).

4. Naći prvih 2014 brojeva tako da se n^2 završava sa 44.

Vrijeme rada: 180 minuta.

Svaki zadatak se boduje od 0 do 25 poena.

Rješenja zadataka detaljno obrazložiti.