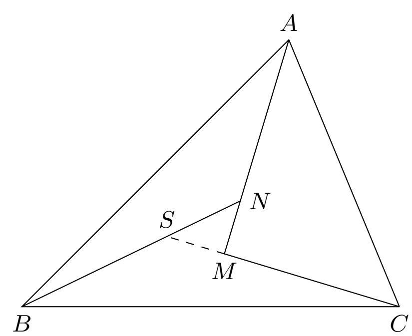
Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za II razred srednje škole

1. U jednakokrakom trouglu ABC $(AB = BC)$ je odabrana tačka M takva da je $\angle AMC = 2\angle ABC$. Tačka N na duži AM zadovoljava uslov $\angle BNM = \angle ABC$. Dokazati da je $BN = CM + MN$.

Rješenje: Iz uslova zadatka imamo da je $\angle AMC = 2\angle ABC$ i $\angle BNM = \angle ABC$.



Neka je $\{S\} = BN \cap CM$. Tada je $\angle MSN = \angle AMC - \angle BNM = \angle ABC$, pa je $MN = MS$. Takodje važi $\angle CBS = \angle ABC - \angle ABN = \angle BAN$ i $\angle BCS = \angle ABC - \angle SBC = \angle ABN$. Kako je $AB = BC$ slijedi da je $\Delta ABN \cong \Delta BCS$ odakle je $BN = CS = CM + MS = CM + MN$. $\square$

2. Neka su $a_1, a_2, ..., a_{2014}$ pozitivni brojevi, takvi da je $a_i \geq \sqrt{2}$ za $i \in \{1, 2, ..., 2014\}$. Dokazati da tada važi nejednakost

$$\frac{(a_1^4 - a_1^2 + a_1 - 2)(a_2^4 - a_2^2 + a_2 - 2)\cdots(a_{2014}^4 - a_{2014}^2 + a_{2014} - 2)}{(a_1^2 + \frac{a_1}{2} - 2)(a_2^2 + \frac{a_2}{2} - 2)\cdots(a_{2014}^2 + \frac{a_{2014}}{2} - 2)} \geq 2^{2014}.$$

Rješenje: Dovoljno je da dokažemo da

$$\frac{x^4 - x^2 + x - 2}{x^2 + \frac{x}{2} - 2} \geq 2, \ \text{za} \ x \geq \sqrt{2}.$$

Gornja nejednačina je ekvivalentna sa

$$x^4 - 3x^2 + 2 \geq 0, \quad x \geq \sqrt{2}. \tag{1}$$

Uzimajući smjenu $x^2 = t \geq 2$ prosto dobijamo da je nejednačina (1) ekvivalentna sa $t^2 - 3t + 2 = (t - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq 0$ za $t \geq 2$. Najmanja vrijednost funkcije $\varphi(t) = (t - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}, t \geq 2$ se postiže upravo za $t = 2$, $\varphi(2) = 0$ i time je nejednakost dokazana. $\square$

3. Izračunati zbir

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2(2014 \cdot 90^\circ).$$

Uglovi su dati u stepenima (ne u radijanima).

Rješenje: Kako je $\sin(x) = \cos(90^\circ - x)$, slijedi

$$\begin{aligned}\sin^2 1^\circ + \cdots + \sin^2 90^\circ &= \sin^2 90^\circ + \sin^2 45^\circ + \sum_{k=1}^{44}(\sin^2 k + \sin^2(90^\circ - k)) \\ &= \sum_{k=1}^{44}(\sin^2 k + \cos^2 k) + 1 + 1/2 = \frac{91}{2}.\end{aligned}$$

Slično,

$$\sum_{k=91}^{180} \sin^2 k^\circ = \sum_{k=1}^{90} \cos^2(k^\circ) = \sum_{k=1}^{44}(\sin^2 k + \cos^2 k) + \cos^2 90^\circ + \cos^2 45^\circ = \frac{89}{2}.$$

Lako se vidi da je za svako $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=1}^{180} \sin^2(k^\circ + 2 \cdot n \cdot 90^\circ) = \sum_{k=1}^{180} \sin^2 k^\circ = 90.$$

Zato je

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2(2014 \cdot 90^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 2014 \cdot 90 = 90630.$$

$\square$

4. Naći prvih 2014 brojeva tako da se n^2 završava sa 44.

Rješenje: Neka je $n = 10k + l$, gdje je $l = 0, 1, \ldots, 9$. Tada je $A = (10k + l)^2 - 44 = 100k^2 + 20kl + l^2 - 44$. Kako je broj A djeljiv sa 10, slijedi da l moze biti 2 ili 8. Ako je $l = 2$, onda je $40k - 40$ djeljiv sa 100 ako i samo ako $(2k - 2)$ djeljiv sa 5. Dakle $k - 1$ je djeljiv sa 5, odnosno $k = 5r + 1$. Zaključujemo da je $n = n_1(r) = 10(5r + 1) + 2$. Ako je $l = 8$, tada je $160k + 20$ djeljiv sa 100 ako i samo ako $16k + 2$ djeljiv sa 10 odnosno $8k + 1$ djeljiv sa 5, tj. $3k + 1$ djeljiv sa 5. Dakle $k = 5r + 3$, pa je $n = n_2(r) = 10(5r + 3) + 8$. Kako je $n_1(r + 1) - n_1(r) = n_2(r + 1) - n_2(r) = 50$, i $n_2(r) - n_1(r) = 26$, slijedi da su rješenja $\{n_1(r) : r = 0, \ldots, 1006\} \cup \{n_2(r) : r = 0, \ldots, 1006\}$. $\square$