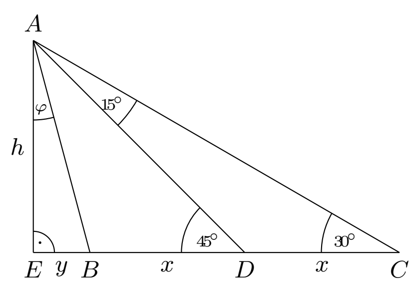
Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za IV razred srednje škole

1. U trouglu ABC je $\angle ACB = 30^0$. Označimo sa D središte stranice BC, a sa E podnožje visine iz tjemena A. Ako je $\angle CAD = 15^0$ odrediti $\angle BAE$.

Rješenje: Označimo sa $x = CD = DB$, $y = EB$, $h = AE$ i $\varphi = \angle BAE$.



Trougao AED je jednakokrako-pravougli, pa je $x + y = h$. Trougao AEC je polovina jednakostraničnog trougla, pa je $2x + y = h\sqrt{3}$. Dobijamo da je $x = h(\sqrt{3} - 1)$ i $y = h(2 - \sqrt{3})$, odakle je $\tan \varphi = \frac{y}{h} = 2 - \sqrt{3}$. Zato je $\tan(2\varphi) = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Dakle, $2\varphi = 30^0$, pa je $\varphi = 15^0$. $\square$

2. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da važi $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 3$. Dokazati da tada važe sljedeće nejednakosti:
a) $a^2b^2c^2 \leq 1$.
b) $\frac{1}{1+a^4(b^2+c^2)} + \frac{1}{1+b^4(c^2+a^2)} + \frac{1}{1+c^4(a^2+b^2)} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2}$.

Rješenje: a) Direktna primjena nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2 daje

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^4},$$

tj. $1 \geq \sqrt[3]{(abc)^4}$, što povlači da je $1 \geq a^2b^2c^2$.

b) Koristeći nejednakost iz dijela pod a) i sljedeći niz identiteta dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+a^4(b^2+c^2)}+\frac{1}{1+b^4(c^2+a^2)}+\frac{1}{1+c^4(a^2+b^2)}\\
&=\frac{1}{1+a^2(a^2b^2+a^2c^2)}+\frac{1}{1+b^2(b^2c^2+b^2a^2)}+\frac{1}{1+c^2(c^2a^2+c^2b^2)}\\
&=\frac{1}{1+a^2(3-b^2c^2)}+\frac{1}{1+b^2(3-a^2c^2)}+\frac{1}{1+c^2(3-a^2b^2)}\\
&=\frac{1}{3a^2+(1-a^2b^2c^2)}+\frac{1}{3b^2+(1-a^2b^2c^2)}+\frac{1}{3c^2+(1-a^2b^2c^2)}\\
&\le\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}+\frac{1}{3c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{3a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^2b^2c^2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

□

3. Dokazati da ako su a, b i c neparni brojevi, tada jednačina $ax^2+bx+c=0$, nema racionalno rješenje.

Rješenje: Neka je $a=2n+1$, $b=2m+1$ i $c=2k+1$. Tada je diskriminanta jednačine

$$D=(2m+1)^2-4(2n+1)(2k+1).$$

Ako bi jednačina imala racionalna rješenja, onda, s obzirom da je D cio broj, on mora biti kvadrat nekog cijelog broja d. Jasno je da je D neparan, pa je i d neparan. Neka je $d=2p+1$. Tada je

$$4m^2+4m-4(2n+1)(2k+1)=4p^2+4p$$

ili što je isto

$$m^2+m-p^2-p=(2n+1)(2k+1).$$

Desna strana je neparan broj a lijeva je paran, i ovo je nemoguće. □

4. Dat je niz

$$a_1=1, \qquad a_n=\frac{4n-2}{n}a_{n-1}, \quad n\ge 2.$$

Dokazati da su svi članovi niza prirodni brojevi.

Rješenje: Na osnovu uslova koji zadovoljava niz a_n, slijedi

$$a_n=\frac{4n-2}{n}a_{n-1}=\cdots=\frac{2^{n-1}(2n-1)!!}{n!},$$

gdje je $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)$. Množeći niz a_n sa $\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$ zaključujemo

$$a_n=\frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}=\binom{2n-1}{n}\in\mathbf{N}.$$

□