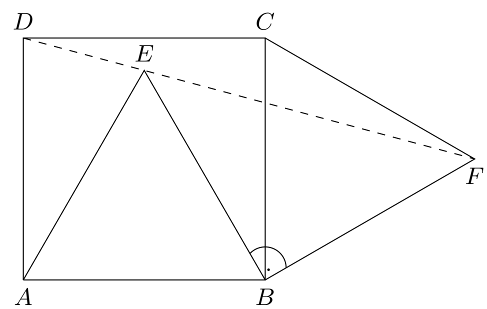
Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za I razred srednje škole

1. Dat je kvadrat $ABCD$. Neka je tačka E u unutrašnjosti, a tačka F u spoljašnjosti ovog kvadrata tako da su trouglovi ABE i CBF jednakostranični. Dokazati da su tačke D, E i F kolinearne.

Rješenje: Dovoljno je dokazati da je $\angle DEA + \angle AEB + \angle BEF = 180^0$.



Kako je trougao AEB jednakostraničan to je $\angle AEB = 60^0$ i $EB = EA = AB$, a kako je trougao CBF jednakostraničan to je $BF = BC = AB = EB$. Slijedi da je trougao EBF jednakokraki, pa je $\angle BEF = \angle BFE$. Dalje je $\angle EBF = \angle EBC + \angle CBF = 90 - \angle ABE + \angle CBF = 90$ odakle dobijamo $\angle BEF = 45^0$.

Kako je trougao DAE jednakokraki, jer je $DA = EA$ to je $\angle DAE = \angle DAB - \angle EAB = 30^0$, pa je $\angle ADE = \angle AED = 75^0$. Dobijamo $\angle DEA + \angle AEB + \angle BEF = 75^0 + 60^0 + 45^0 = 180$. $\square$

2. Pokazati da je rješenje date jednačine cjelobrojno:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x+2014}+\sqrt{x+2015}} = 1.$$

Rješenje: Racionalisanjem svakog od sabiraka na lijevoj strani jednačine, dobijamo:

$$-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}) - (\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}) - \cdots - (\sqrt{x+2014}-\sqrt{x+2015}) = 1.$$

Odavde slijedi

$$-\sqrt{x} + \sqrt{x + 2015} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1007^2.$$

$\square$

3. Razlika dva neparna broja djeljiva je sa 5. Kojom se cifrom završava razlika kubova tih brojeva?

Rješenje: Označimo date brojeve sa x i y. Budući da su x i y neparni, njihova razlika je djeljiva sa 2. Kako je, po uslovu zadatka, razlika djeljiva i sa 5, slijedi da je $x - y$ djeljivo i sa 10 tj. $x - y$ se završava sa nulom.

Razliku kubova datih borjeva napišimo u obliku

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

pa kako se $x - y$ završava sa nulom to se i $x^3 - y^3$ mora završavati sa nulom. $\square$

4. Naći prvih 2014 brojeva tako da se n^2 završava sa 44.

Rješenje: Neka je $n = 10k + l$, gdje je $l = 0, 1, \ldots, 9$. Tada je $A = (10k + l)^2 - 44 = 100k^2 + 20kl + l^2 - 44$. Kako je broj A djeljiv sa 10, slijedi da l moze biti 2 ili 8. Ako je $l = 2$, onda je $40k - 40$ djeljiv sa 100 ako i samo ako $(2k - 2)$ djeljiv sa 5. Dakle $k - 1$ je djeljiv sa 5, odnosno $k = 5r + 1$. Zaključujemo da je $n = n_1(r) = 10(5r + 1) + 2$. Ako je $l = 8$, tada je $160k + 20$ djeljiv sa 100 ako i samo ako $16k + 2$ djeljiv sa 10 odnosno $8k + 1$ djeljiv sa 5, tj. $3k + 1$ djeljiv sa 5. Dakle $k = 5r + 3$, pa je $n = n_2(r) = 10(5r + 3) + 8$. Kako je $n_1(r + 1) - n_1(r) = n_2(r + 1) - n_2(r) = 50$, i $n_2(r) - n_1(r) = 26$, slijedi da su rješenja $\{n_1(r) : r = 0, \ldots, 1006\} \cup \{n_2(r) : r = 0, \ldots, 1006\}$. $\square$