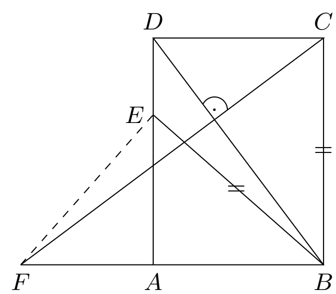
Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2014

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za III razred srednje škole

1. Na stranici AD pravougaonika $ABCD$ ($AB < BC$) izabrana je tačka E tako da je $BE = BC$. Normala iz tjemena C na dijagonalu BD siječe produžetak stranice AB u tački F. Dokazati da je trougao BEF pravougli.

Rješenje: Dokazujemo da je trougao FAE sličan sa trouglom EAB.



Da bi to pokazali, kako je $\angle FAE = \angle EAB = 90^0$ dovoljno je dokazati da je $FA : EA = EA : AB$. Uočimo da je trougao CFB sličan trouglu BDA jer su odgovarajući uglovi jednaki kao uglovi sa normalnim kracima. Označimo $AB = a$ i $BC = b$. Dobijamo da je $FB : BC = DA : AB$, pa je $FB = \frac{b^2}{a}$ odakle je $FA = \frac{b^2-a^2}{a}$. Kako je na osnovu Pitagorine teoreme $AE^2 = BE^2 - AB^2 = b^2 - a^2$ to je $FA : EA = EA : AB$. □

2. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da važi $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 3$. Dokazati da tada važe sljedeće nejednakosti:
a) $a^2b^2c^2 \leq 1$.
b) $\frac{1}{1+a^4(b^2+c^2)} + \frac{1}{1+b^4(c^2+a^2)} + \frac{1}{1+c^4(a^2+b^2)} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2}$.

Rješenje: a) Direktna primjena nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2 daje

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^4},$$

tj. $1 \geq \sqrt[3]{(abc)^4}$, što povlači da je $1 \geq a^2b^2c^2$.
b) Koristeći nejednakost iz dijela pod a) i sljedeći niz identiteta dobijamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+a^4(b^2+c^2)}+\frac{1}{1+b^4(c^2+a^2)}+\frac{1}{1+c^4(a^2+b^2)}\\
&=\frac{1}{1+a^2(a^2b^2+a^2c^2)}+\frac{1}{1+b^2(b^2c^2+b^2a^2)}+\frac{1}{1+c^2(c^2a^2+c^2b^2)}\\
&=\frac{1}{1+a^2(3-b^2c^2)}+\frac{1}{1+b^2(3-a^2c^2)}+\frac{1}{1+c^2(3-a^2b^2)} \qquad (1)\\
&=\frac{1}{3a^2+(1-a^2b^2c^2)}+\frac{1}{3b^2+(1-a^2b^2c^2)}+\frac{1}{3c^2+(1-a^2b^2c^2)}\\
&\leq \frac{1}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}+\frac{1}{3c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{3a^2b^2c^2}=\frac{1}{a^2b^2c^2}.
\end{aligned}$$

□

3. Neka je x realan broj takav da je $x+\dfrac{1}{x}$ cio broj. Dokazati da je tada $x^{2014}+\dfrac{1}{x^{2014}}$ takodje cio broj.

Rješenje: Označimo sa $P_n = x^n + \dfrac{1}{x^n}$. Dokažimo matematičkom indukcijom da je P_n cio broj. Imamo da je $P_0 = 2$ cio broj, a $P_1 = x + \dfrac{1}{x}$ je po pretpostavci cio broj. Uočimo da je $P_1^2 = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 = P_2 + P_0$. Otuda je $P_2 = P_1^2 - P_0$ takodje cio broj.
Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve brojeve $\leq n$. Dokažimo da važi i za $n+1$. Imamo da je $P_n \cdot P_1 = \left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}} = P_{n+1} + P_{n-1}$, pa je $P_{n+1} = P_n \cdot P_1 - P_{n-1}$ cio broj. Specijalno, za $n = 2014$ dobijamo da je $P_{2014} = x^{2014} + \dfrac{1}{x^{2014}}$ cio broj. □

4. U koordinatnoj ravni date su nekolinerane tačke $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$, pri čemu su $x_i, y_i, i = 1,2,3$ neparni prirodni brojevi. Ispitati da li postoji trougao odredjen tačkama A,B,C, takav da su dužine njegovih stranica prirodni brojevi, a povšina trougla iznosi $\sqrt{34}$.

Rješenje: Pretpostavimo da postoji trougao $\triangle ABC$ pod navedenim uslovima. Primijetimo da su tada dužine stranica parni brojevi. Naime,

$$|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

a kako su svi sabirci pod korijenom dijeljivi sa 4 to prema uslovu prirodan broj $|AB|$ mora da bude paran. Slično važi i za ostale stranice.
Označimo dužine stranica $|AB|, |BC|, |CA|$ redom brojevima $2k_1, 2k_2$ i $2k_3$, gdje su k_1, k_2, k_3 neki prirodni brojevi.
Tada koristeći Heronov obrazac za površinu trougla imamo

$$(k_1+k_2+k_3)(k_1+k_2-k_3)(k_1+k_3-k_2)(k_2+k_3-k_1) = 34 = 2\cdot 17.$$

Posljednja jednačina povlači da je $k_1+k_2+k_3=34$, a $k_1+k_2-k_3=k_1+k_3-k_2=k_2+k_3-k_1=1$ ili je
$k_1+k_2+k_3=17$, dok sa druge strane bez umanjenja opštosti možemo da uzmemo da je $k_1+k_2-k_3=2$ i $k_1+k_3-k_2=k_2+k_3-k_1=1$.
Međutim prva mogućnost povlači da je $k_1+k_2+k_3=34$ i sabirajući preostale jednačine dobijamo da je $k_1+k_2+k_3=3$, što je nemoguće.
Slično, u drugoj varijanti imamo $k_1+k_2+k_3=17$ i sabirajući preostale tri jednačine ispada da je $k_1+k_2+k_3=4$, što je nemoguće. Prema tome, ne postoji trougao $\triangle ABC$ pod navedenim uslovima. $\square$